

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5$; para $f(3)$, $f(-3)$, $f(b+1)$

d. $f(x) = 2x - \frac{1}{5}$; para $f(-1)$, $f(a)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$

e. $f(x) = \frac{6x+3}{2}$; para $f(-1)$, $f(3m+1)$, $f\left(\frac{m}{2}\right)$

f. $f(x) = 5x^2 - x$; para $f(2)$, $f(0)$, $f(m^2)$

g. $f(x) = 3x + 5$; para $f\left(-\frac{1}{4}\right)$, $f(a^2 - a + 1)$

6. Completar la tabla de valores para cada función. Luego, realizar la gráfica.

a. $f(x) = x + 6$

x	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{8}{3}$	5
f(x)						

b. $f(x) = \frac{2x+1}{3}$

x	0	-1	$\frac{1}{2}$	5	6	10
f(x)						

c. $f(x) = 4x^2$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)						

d. $f(x) = x^3 + 1$

x	$-\frac{1}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
f(x)						

7. Para cada par de conjuntos A y B plantear dos funciones $f: A \rightarrow B$.

a. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x / x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$

b. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

c. $A = \{x / x < 3, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x / x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$

d. $A = \{x / x < 8, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x / x \leq 4, x \in \mathbb{N}\}$

e. $A = B = \{x / x \in \mathbb{N} / x \leq 10\}$

8. Escribir el valor de verdad de cada afirmación. Luego, justificar la respuesta.

a. $f(m+1)$ en la función $f(x) = 3ax + 2a$ es equivalente a $a(3m+5)$.

b. La función $f(x) = 5x + 2$ tiene como imagen $\frac{9}{4}$ cuando $x = \frac{1}{2}$.

c. Toda función es una relación.

d. Todas las relaciones se pueden representar en el plano cartesiano.

1.2 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dada la función $f: X \rightarrow Y$, se define el dominio de f como el conjunto de las primeras componentes de las parejas que están en f . Se escribe $\text{Dom } f$. El rango de f es el conjunto de imágenes $f(x)$ de los $x \in X$.

Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = 2x - 5$ corresponde a todos los posibles valores que x puede tomar, para los cuales $f(x)$ está definida.

Como x puede tomar cualquier valor, se dice que el dominio de f corresponde al conjunto de los números reales. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

El rango de la función corresponde a todos los valores que puede tomar y al variar x en el dominio. Como y toma cualquier valor, se dice que el rango de f corresponde al conjunto de los números reales. $\text{Ran } f = \mathbb{R}$.

Algebraicamente, el rango de una función se puede encontrar despejando x en la función.

$$y = 2x - 5$$

$$x = \frac{y+5}{2}$$

Notación de función

Como y puede tomar cualquier valor, se concluye que $\text{Ran } f = \mathbb{R}$ (figura 5).

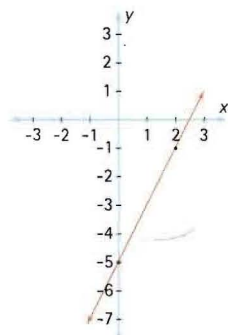


Figura 5

Dominio y rango de funciones sencillas

Siempre es posible calcular el dominio y el rango de cualquier función polinómica, al observar su ecuación o su representación gráfica.

Ejemplo

Calcular el dominio y el rango de las siguientes funciones. Trazar su gráfica.

Gráfica de la función
 $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

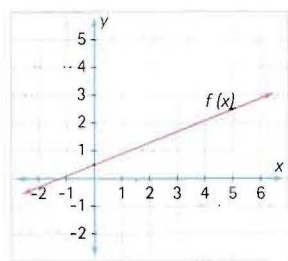


Figura 6

a. $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

b. $g(x) = 3x^2 + 1$

c. $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5$

Solución

- a. Como la función corresponde a una función lineal, x puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales. Luego,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Por otra parte, $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5}x = y - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5y}{2} - \frac{5}{4}$$

Tabla de valores

x	0	2	5
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{5}{2}$

de donde y puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales, luego

$$\text{Ran } f = \mathbb{R}$$

La gráfica de f se muestra en la figura 6.

- b. La función corresponde a una función cuadrática, x puede tomar cualquier valor en el conjunto \mathbb{R} . Luego,

$$\text{Dom } g = \mathbb{R}$$

El rango se puede hallar así:

$$g(x) = 3x^2 + 1$$

$$y = 3x^2 + 1$$

$$3x^2 = y - 1$$

$$x^2 = \frac{y-1}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{y-1}{3}}$$

Tabla de valores

x	0	-1	1
$g(x)$	1	4	4

Gráficamente se puede observar que x puede tomar cualquier valor sobre el eje x , mientras que las imágenes de x están únicamente a partir del punto $(0, 1)$. Así,

$$\text{Ran } f = [1, \infty)$$

La gráfica de $g(x)$ se muestra en la figura 7.

Las funciones polinómicas de la forma
 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
 tienen como dominio implícito al conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Gráfica de la función
 $g(x) = 3x^2 + 1$

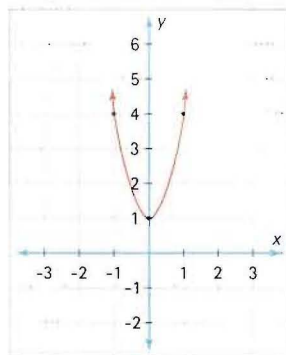


Figura 7

c. $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5$

La función h es polinómica, por tanto

$$\text{Dom } h(x) = \mathbb{R}$$

Al trazar la gráfica de la función $h(x)$, se observa que recorre todo el eje y ; luego, $\text{Ran } h(x) = \mathbb{R}$. La gráfica de $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5$ es la siguiente

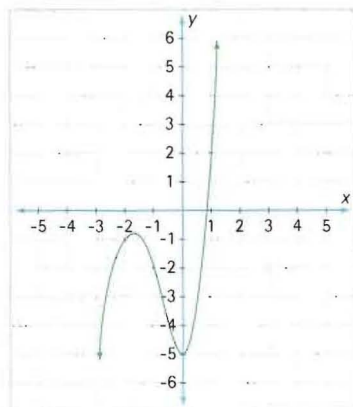


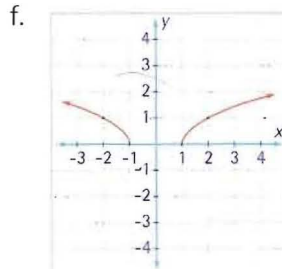
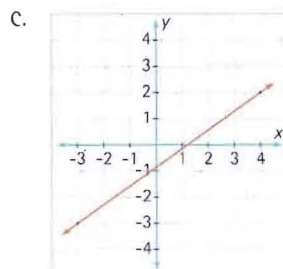
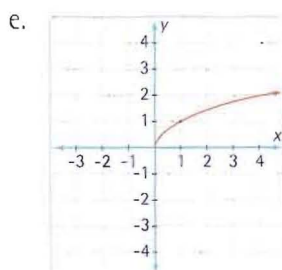
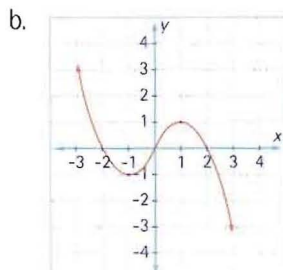
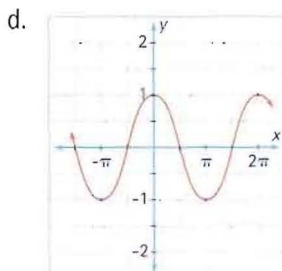
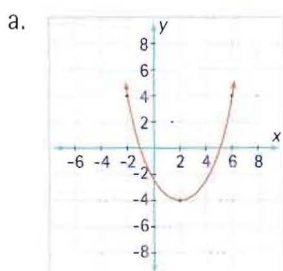
Tabla de valores

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	-5	-2	-5	2	31

Práctica 2

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Determinar el dominio y el rango de las funciones representadas en cada gráfica.



2. Determinar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a. $f(x) = 3x + 1$ | i. $f(x) = -2x^2 - 1$ |
| b. $f(x) = 4x^2 - 1$ | j. $f(x) = 2x^4 - 1$ |
| c. $f(x) = 8x + 5$ | k. $f(x) = 5x^3 - 4$ |
| d. $f(x) = 5x^2$ | l. $f(x) = 2x^2 + 6$ |
| e. $f(x) = 7x^3 + 8$ | m. $f(x) = x + 6$ |
| f. $f(x) = \frac{4}{5}x$ | n. $f(x) = \frac{x^2}{2}$ |
| g. $f(x) = \frac{x+8}{2}$ | o. $f(x) = \frac{3x^3}{5}$ |
| h. $f(x) = 3x + \frac{6}{5}$ | p. $f(x) = \frac{2x^2}{3} + 5$ |

3. Indicar el error cometido al calcular el dominio y el rango de cada función.

- a. $f(x) = 4x^2 - 3$
 Ya que la función es cuadrática, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, y
- | | |
|-------------------|--|
| $f(x) = 4x^2 - 3$ | $x^2 = \frac{y-3}{4}$ $x = \sqrt{\frac{y-3}{4}}$ |
| $y = 4x^2 - 3$ | |
| $4x^2 = y - 3$ | |
- el rango de la función es $\text{Ran } f = [3, \infty)$

b. $f(x) = 5x + 4$

Ya que la función es lineal, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, y

$$f(x) = 5x + 4$$

$$y = 5x + 4$$

$$5x = y - 4$$

$$x = y - \frac{4}{5}$$

el rango de la función es $\text{Ran } f = [-4, \infty)$

4. Escribir una función que tenga el dominio y rango que se indican a continuación.

a. $\text{Dom} = \mathbb{R}$, $\text{Ran} = \mathbb{R}$

b. $\text{Dom} = \mathbb{R}$, $\text{Ran} = [-5, \infty)$

c. $\text{Dom} = \mathbb{R}^+$, $\text{Ran} = \mathbb{R}^+$

d. $\text{Dom} = \mathbb{R}$, $\text{Ran} = [0, \infty)$

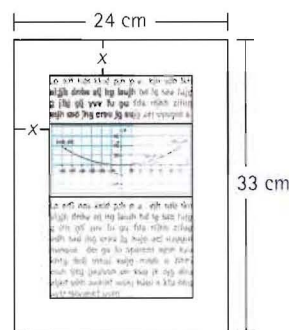
e. $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$, $\text{Ran} = \mathbb{R} - \{0\}$

f. $\text{Dom} = \mathbb{R}$, $\text{Ran} = \mathbb{R}^+$

g. $\text{Dom} = [8, \infty)$, $\text{Ran} = \mathbb{R}^+$

h. $\text{Dom} = \mathbb{R}^-$, $\text{Ran} = \mathbb{R}^+$

5. Una página cuyas dimensiones son 24 cm de ancho y 33 cm de largo tiene un margen de ancho x , que rodea el material impreso.



- Escribir una fórmula para el área A de la región impresa en función del ancho x del margen.
- Encontrar el dominio y el rango de A .
- Hallar el área de la parte impresa para anchos cuya margen sea
 - 1 cm
 - 2 cm
 - 3 cm
- Si las dimensiones de la página fueran $(24 + y)$ cm y $(33 + y)$ cm, ¿cuál sería la fórmula para el área A de la región impresa en función del ancho x del margen?

Dominio y rango de funciones con alguna restricción

Hasta ahora se han trabajado funciones en las cuales el dominio es el conjunto de todos los números reales; pero es posible encontrar otras funciones cuyo dominio depende de los valores de x para los cuales la expresión matemática dada está definida. Así, $\text{Dom } f = [2, \infty)$

Por ejemplo, para hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x - 2}$ se debe tener en cuenta que las raíces pares de números negativos no existen en \mathbb{R} , es decir, el dominio de f estará formado por todos los valores para los cuales $x - 2$ es mayor o igual que cero. Así $\text{Dom } f = [2, \infty)$

El rango de f se halla despejando x en la expresión $y = \sqrt{x - 2}$.

Luego, $x = y^2 + 2$, por lo tanto,

$$\text{Ran } f = [0, \infty) \text{ (figura 8)}$$

Es importante anotar que para hallar el rango de una función no siempre es posible despejar x en términos de y , pues puede suceder que dicho proceso requiera de otros conocimientos más avanzados que los vistos hasta ahora. En estos casos, se recurre a la gráfica de la función, la cual permite visualizar los valores de y donde la función está definida.

Por ejemplo, $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 8}$

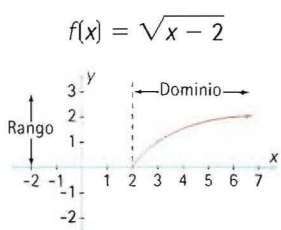


Figura 8

Ejemplo

Hallar el dominio y el rango de cada función. Luego, trazar la gráfica.

a. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c. $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

b. $g(x) = \frac{3x-2}{x+3}$

d. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

Solución

a. La función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ no está definida para $x = 2$ pues $x - 2 = 0$ cuando

$x = 2$. Luego, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Por otro lado como $y = f(x)$ entonces

$y = \frac{1}{x-2}$

Sustituyendo

$x - 2 = \frac{1}{y}$

Operando

$x = \frac{1}{y} + 2$

Despejando

Luego, $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $y \neq 0$. Por consiguiente, $\text{Ran } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$.

La gráfica de f se muestra en la figura 9.

Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-2}$

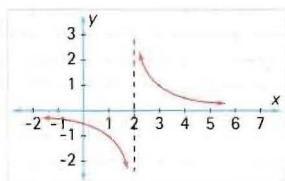


Figura 9

La gráfica no corta la recta vertical que pasa por $x = 2$ ni el eje x .

Gráfica de $g(x) = \frac{3x-2}{x+3}$

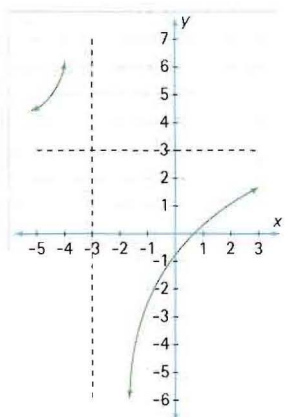


Figura 10

La gráfica no corta la recta vertical que pasa por $x = -3$ ni la recta horizontal que pasa por $y = 3$.

b. La función $g(x) = \frac{3x-2}{x+3}$ no está definida para $x = -3$; luego, $\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$.

El rango de $g(x)$ se puede hallar despejando x . Como $y = g(x)$, entonces

$y = \frac{3x-2}{x+3}$

Sustituyendo

$y(x+3) = 3x-2$

Operando

$xy + 3y = 3x - 2$

$xy - 3x = -3y - 2$

$x(y-3) = -(3y+2)$

$x = -\frac{(3y+2)}{y-3}$

Despejando

Luego, $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $y \neq 3$. Por consiguiente, $\text{Ran } g(x) = \mathbb{R} - \{3\}$.

La gráfica de g se muestra en la figura 10.

c. La función $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$ es equivalente a la función $h(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$,

luego, $h(x)$ no está definida para $x = -2$ ó $x = 2$.

Por consiguiente, $\text{Dom } h(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

El rango se puede determinar a partir de la gráfica.

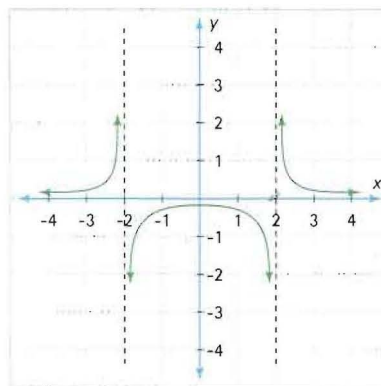
Para trazar la gráfica se debe tener en cuenta las siguientes condiciones:

- La función no está definida para $x = -2$ y para $x = 2$.
- La función nunca toma el valor 0, lo que significa que no corta el eje x .
- La función corta el eje y cuando $x = 0$; es decir, $y = -\frac{1}{4}$.
- Otros valores se muestran en la siguiente tabla.

Tabla de valores

x	$h(x)$
-4	$\frac{1}{12}$
-3	$\frac{1}{5}$
-1	$-\frac{1}{3}$
1	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{12}$

Gráfica de la función



La gráfica muestra claramente el dominio de la función
 $h(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
 El rango de la función $h(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

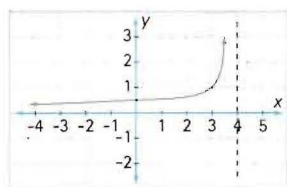


Figura 11

d. La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ está definida si y sólo si $4-x > 0$, de donde:

$$4-x > 0 \Leftrightarrow 4 > x \\ \Leftrightarrow x < 4$$

Por consiguiente, $\text{Dom } f(x) = (-\infty, 4)$.

El rango se puede determinar a partir de la gráfica de figura 11.

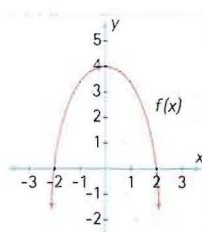
$$\text{Ran } f(x) = (0, \infty).$$

Es posible determinar el dominio y el rango de una función a partir de la gráfica que la describe.

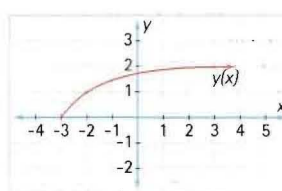
Ejemplo

Hallar el dominio y el rango de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación.

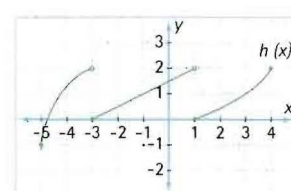
a.



b.



c.



Solución

- a. La función que corresponde a la gráfica está definida para todos los valores de x , luego

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Como la función no toma valores mayores que 4, se puede afirmar que el rango corresponde a todos los valores de y menores o iguales que 4; luego,

$$\text{Ran } f(x) = (-\infty, 4].$$

- b. La función que corresponde a la gráfica está definida para los valores de x mayores o iguales que -3 ; luego,

$$\text{Dom } g(x) = [-3, \infty).$$

Como la función no toma valores por debajo del eje x , se puede afirmar que el rango son todos los valores de y mayores o iguales que cero. Luego,

$$\text{Ran } g(x) = [0, \infty) \text{ o } \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

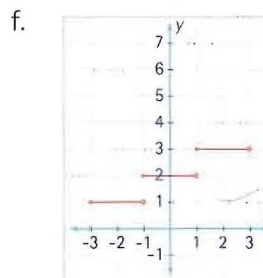
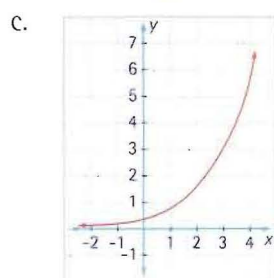
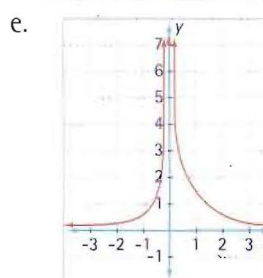
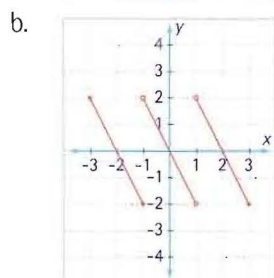
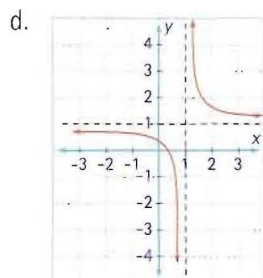
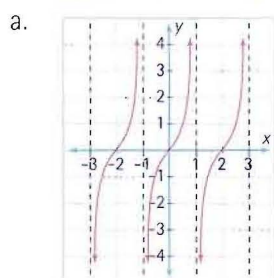
- c. La función correspondiente a la gráfica está definida para los valores menores o iguales que 4. Luego, $\text{Dom } h(x) = (-\infty, 4]$.

Como la función toma valores inferiores o iguales a 2, entonces $\text{Ran } h(x) = (-\infty, 2]$.

Práctica 3

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Encontrar el dominio y el rango de las funciones que corresponden a cada gráfica.



2. Hallar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

h. $f(x) = \frac{5}{2x^2 + 1}$

b. $f(x) = \sqrt{x+2}$

i. $f(x) = \sqrt{1-2x}$

c. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

j. $f(x) = \sqrt{6-2x}$

d. $f(x) = \frac{2}{x}$

k. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

e. $f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$

l. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

f. $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$

m. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x}}$

n. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

3. Determinar si el dominio y el rango dado para cada función es el correcto. Justificar la respuesta.

a. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b. $g(x) = \sqrt{x+5}$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\text{Dom } g(x) = \{5, \infty\}$

$\text{Ran } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Ran } g(x) = \{0, \infty\}$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Dom $h(x) = \mathbb{R}$

Ran $h(x) = \mathbb{R}$

d. $i(x) = \frac{2x+1}{x+5}$

Dom $i(x) = \mathbb{R}$

Ran $i(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

e. $j(x) = \frac{6}{x+3}$

Dom $j(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

Ran $j(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

f. $l(x) = \sqrt{x-2}$

Dom $l(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

Ran $l(x) = \mathbb{R}$

g. $k(x) = \frac{4x}{x+6}$

Dom $k(x) = \mathbb{R} - \{6\}$

Ran $k(x) = \mathbb{R} - \{4\}$

h. $w(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Dom $w(x) = \mathbb{R}$

Ran $w(x) = \mathbb{R}^+$

b. Dom $g(x) = (0, \infty)$

Ran $g(x) = \mathbb{R}$

c. Dom $h(x) = \mathbb{R} - \{5\}$

Ran $h(x) = \mathbb{R} - \{5\}$

d. Dom $i(x) = \mathbb{R}$

Ran $i(x) = \mathbb{R}^+$

e. Dom $j(x) = (-2, 5] \cup [6, \infty)$

Ran $j(x) = (-\infty, 3]$

f. Dom $k(x) = \mathbb{R} - \{8\}$

Ran $k(x) = [-2, 2]$

g. Dom $l(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ran $l(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

4. Realizar el bosquejo de la gráfica de una función con las condiciones que se indican en cada caso.

a. Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Ran $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

TEMA 2

FUNCIONES BIYECTIVAS

2.1 FUNCIONES INYECTIVAS O FUNCIONES UNO A UNO

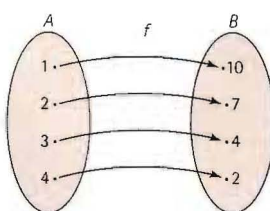
Una función f con dominio el conjunto X se llama función **inyectiva** o **uno a uno** si no existen dos elementos distintos de X con una misma imagen.

En símbolos, Si $x_1 \neq x_2$, entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$ o

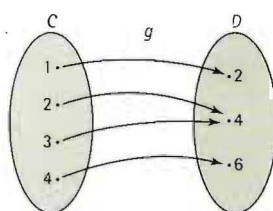
$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En los siguientes diagramas se representan una función inyectiva y una función no inyectiva.

Función inyectiva



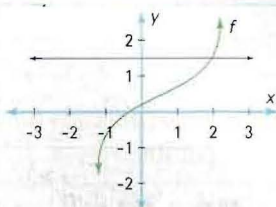
Función no inyectiva



En f se observa que elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes en el codominio. Cuando se verifica esta condición se dice que la función es inyectiva o uno a uno.

Por otro lado, la función g no es una función inyectiva, ya que elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen en el codominio.

Interpretación geométrica de una función inyectiva



La función f es inyectiva si al trazar cualquier recta horizontal corta la gráfica a lo sumo en un punto.

Función par

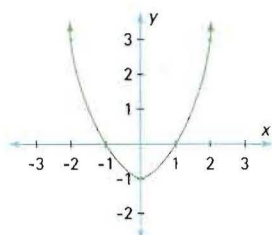


Figura 1

Función impar

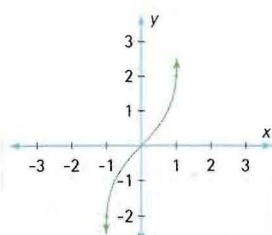


Figura 2

Función creciente

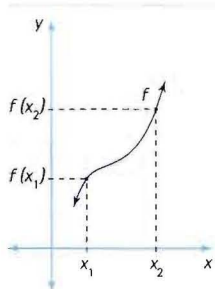


Figura 3

Función decreciente

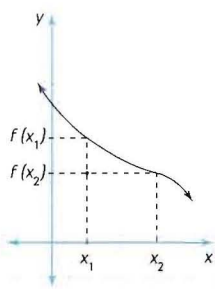


Figura 4

Además del uso de la tabla de valores, otro medio que permite trazar la gráfica aproximada de una función consiste en determinar si esta es par o impar.

3.1 FUNCIONES PARES

Se dice que una función f es par, si $f(-x) = f(x)$, $\forall x$ en su dominio.

Gráficamente, una función f es par si es simétrica respecto al eje Y, como se muestra en la figura 1.

3.2 FUNCIONES IMPARES

Se dice que una función f es impar, si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$ en su dominio.

Gráficamente, una función f es impar si es simétrica respecto al origen, como se muestra en la figura 2.

Ejemplo

Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o no cumplen ninguna de las dos condiciones.

a. $f(x) = x^3 + x$ b. $h(x) = x^2 - x$

Solución

a. En la función $f(x) = x^3 + x$,
 $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$.
 Luego, $f(x) = x^3 + x$ es una función impar.

b. En la función $h(x) = x^2 - x$,
 $h(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \neq h(x)$ y $x^2 + x \neq -h(x)$.
 Luego $h(x)$ no es ni par ni impar.

3.3 FUNCIONES CRECIENTES Y FUNCIONES DECRECIENTES

Una función f es **creciente** en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo I , si para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) > f(x_2)$.

La gráfica de una función creciente y de una función decreciente se muestran en las figuras 3 y 4.

Función constante

Una función f es **constante** en un intervalo I , si $\forall x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$.

La gráfica de una función constante es paralela al eje x .

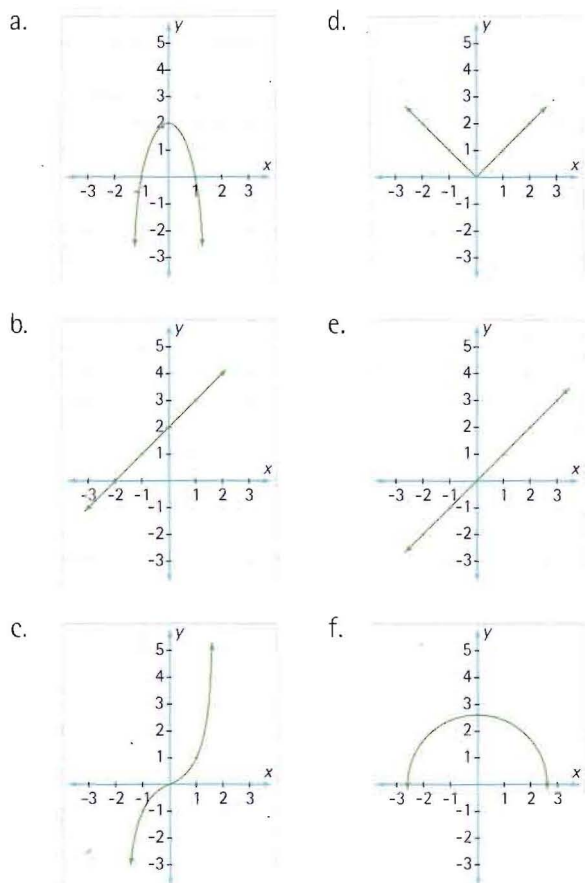
Práctica 5

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

- Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles son impares y cuáles no cumplen ninguna de las dos condiciones.

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a. $f(x) = x^2 + 5$ | f. $f(x) = x^3 + 4$ |
| b. $f(x) = x^3 + x - 6$ | g. $f(x) = 2x^2 + 6$ |
| c. $f(x) = x^2 + x + 1$ | h. $f(x) = x - 1$ |
| d. $f(x) = (x + 3)^2$ | i. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ |
| e. $f(x) = \frac{3}{x}$ | j. $f(x) = \frac{-3x^3 + 6}{2}$ |

- Observar las gráficas e indicar cuáles corresponden a funciones pares, cuáles corresponden a funciones impares y cuáles no cumplen ninguna de estas condiciones.

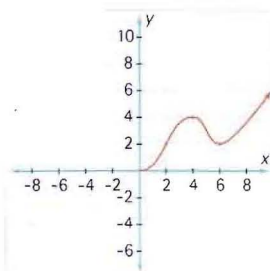


- Si $P(4, 2) \in f$ y f es una función par, en relación con P , ¿cuáles son las coordenadas de otro punto Q , tal que $Q \in f$?

- Si $M(4, 2) \in g$ y g es una función impar en relación con M , ¿cuáles son las coordenadas de otro punto N , tal que $N \in g$?

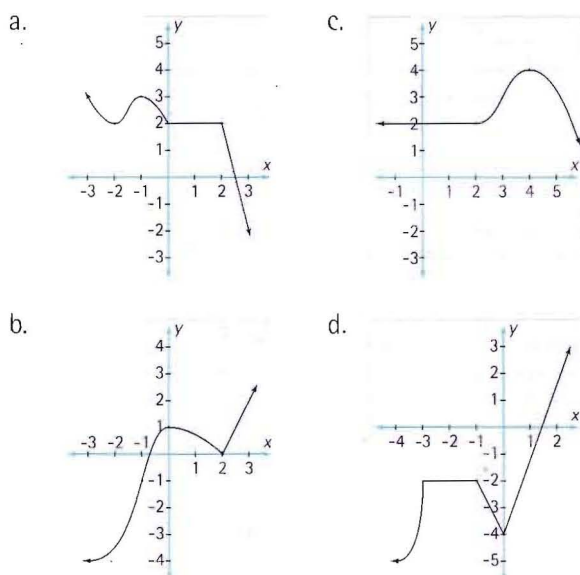
- Si $R(4, 2) \in h$ y h es una función que no es par ni impar. ¿Es posible que $S(5, 2) \in h$? ¿Por qué?

- El dominio de la función que aparece en la gráfica es el intervalo $[-6, 6]$.



- Completar la gráfica para f si es una función par.
- Completar la gráfica para f si es una función impar.

- Para cada una de las funciones, determinar los intervalos en que la función es creciente, decreciente y constante.



- Una ventana tiene forma rectangular. Si el perímetro de la ventana es de 90 cm.

- Expresar el área de la ventana en función del ancho x de ella.
- ¿La función planteada es una función par? ¿Por qué?

Las funciones reales se clasifican en: funciones polinómicas, funciones racionales, funciones radicales, funciones trascendentes y funciones especiales.

4.1 FUNCIONES POLINÓMICAS

Función constante

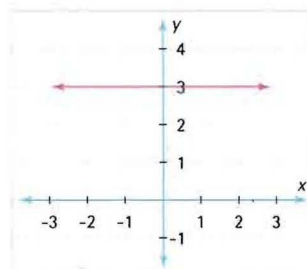
Una función constante es aquella en la cual $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

El dominio de una función constante es \mathbb{R} y el rango es k .

Por ejemplo, $f(x) = 3$

x	-1	0	2	4
$f(x)$	3	3	3	3

La gráfica de una función constante es paralela al eje x .



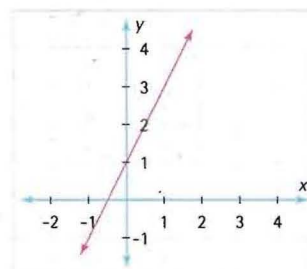
Función lineal

Una función lineal es aquella cuya gráfica describe una línea recta.

El dominio de una función lineal es \mathbb{R} y el rango es \mathbb{R} .

Por ejemplo, $f(x) = 2x + 1$

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-1	1	5	7



Una función lineal es afín, si su gráfica no pasa por el punto $(0, 0)$.

Función cuadrática

Una función cuadrática es aquella de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

Se pueden presentar tres tipos de funciones cuadráticas.

- Si $b = c = 0$. Entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen.
- Si $b = 0$, $c \neq 0$. Entonces $f(x) = ax^2 + c$ y la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$.
- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$. Al completar el cuadrado perfecto se puede obtener la ecuación $f(x) = a(x - h)^2 + k$, con $h, k \in \mathbb{R}$. Luego, la gráfica es una parábola con vértice en (h, k) .

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$. Luego, trazar la gráfica correspondiente.

Solución

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 50 \Rightarrow f(x) = 3(x^2 + 8x) + 50$$

Factorizando

$$\Rightarrow f(x) = 3(x^2 + 8x + 16) + 50 - 48$$

Completando el cuadrado

$$\Rightarrow f(x) = 3(x + 4)^2 + 2$$

Luego $a = 3$, $h = -4$, $k = 2$.

En general,

- El dominio de una función cuadrática es el conjunto \mathbb{R} y el rango es un intervalo de \mathbb{R} .
- Para trazar la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, se transforma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El punto (h, k) es el vértice de la parábola. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Otros valores se presentan en la siguiente tablâ de valores:

x	-6	-4	-2	-1
$f(x)$	14	2	14	29

La gráfica aproximada de la función se presenta en la figura 1.

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 50$$

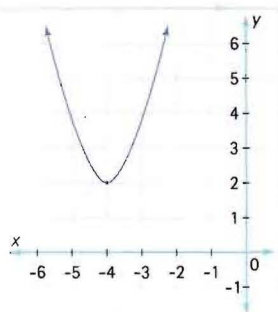


Figura 1

También se puede determinar el vértice de una parábola de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, mediante la expresión

$$V(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

En general, una función polinómica es aquella de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$, y $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes, llamadas coeficientes del polinomio.

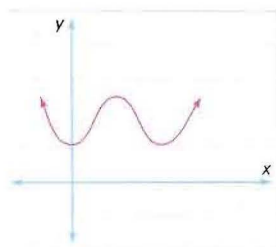
El dominio de una función polinómica será el conjunto \mathbb{R} y el rango será un intervalo de \mathbb{R} .

La gráfica de un polinomio es una curva suave y continua. La palabra suave significa que no tiene cambios bruscos.

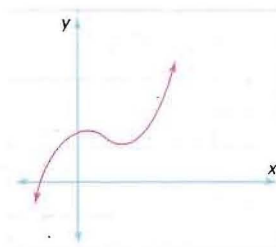
Algunas gráficas de funciones polinómicas son:

Polinomio de grado par

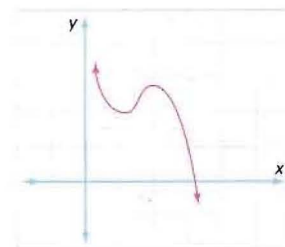
Polinomios de grado impar



$$a_n > 0$$



$$a_n > 0$$



$$a_n < 0$$

4.2 FUNCIONES RACIONALES

$x \rightarrow a$: x tiende a a .

$x \rightarrow a^-$: x tiende a a por la izquierda.

$f(x) \rightarrow \infty$: $f(x)$ aumenta sin límite o $f(x)$ tiende a infinito.

$f(x) \rightarrow -\infty$: $f(x)$ disminuye sin límite o $f(x)$ tiende a menos infinito.

Los símbolos ∞ (infinito) y $-\infty$ (menos infinito) no representan números reales, sólo indican cierto tipo de comportamiento de funciones y variables.

Una función f es función racional si

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$

El dominio de f está formado por todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{3}{x^2-4}$ y $h(x) = \frac{x^3-8}{x^2+9}$

son funciones racionales y sus dominios son $\text{Dom } f: \mathbb{R} - \{2\}$; $\text{Dom } g: \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y $\text{Dom } h = \mathbb{R}$.

El rango de una función racional puede determinarse al trazar su gráfica.

Gráfica de una función racional

Para trazar la gráfica de una función racional es importante tener en cuenta los valores para los cuales la función no está definida.

• Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función racional f , si $f(x) \rightarrow \infty$ o si $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha.

Luego, si a es un cero del denominador, entonces, la gráfica de la función f tiene una **asíntota vertical** en $x = a$, siempre y cuando el numerador y el denominador de la función racional no tengan un factor común.

• Asíntota horizontal

La recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función racional f , si $f(x) \rightarrow c$ cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$.

Dada la función racional f definida por

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Se puede afirmar que:

- Si $n < m$, entonces, la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (eje x).
- Si $n = m$, entonces la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$.
- Si $n > m$, entonces, la función f no tiene asíntota horizontal.

Por ejemplo, la función f mostrada en la figura 2, tiene dos asíntotas verticales y una asíntota horizontal.

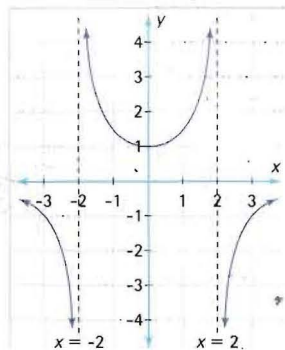


Figura 2

Principios de graficación

- 1º Determinar los ceros reales del numerador y del denominador, es decir, $f(x) = 0$ y $f(x)$ no está definida.
- 2º Hallar la asíntota vertical, si existe.
- 3º Hallar la intersección de f con el eje y , es decir, $f(0)$.
- 4º Hallar la asíntota horizontal si existe.
- 5º Obtener otros valores si es necesario y trazar la gráfica con los puntos obtenidos y las asíntotas.

Ejemplo

Trazar la gráfica de las siguientes funciones racionales. Luego, hallar dominio y rango.

a. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

b. $g(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+8}$

Solución

- a. Aplicando los principios anotados al lado izquierdo, se puede trazar la gráfica de la función f .

1º. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6} \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x-3)}$; de donde:

$f(x) = 0$ si $x = 2$. $f(x)$ no está definida si $x = -2$ y $x = 3$.

2º. Luego, las asíntotas verticales son las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

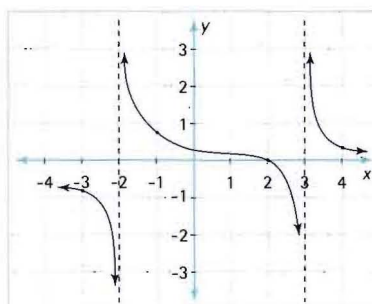
3º. Como $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$, entonces, $f(0) = \frac{0-2}{0^2-0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

luego, $f(0) = \frac{1}{3}$.

4º. Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, es decir, $n < m$, el eje x es asíntota horizontal.

5º. Otros valores y la gráfica se muestran a continuación.

x	$f(x)$
-3	$-\frac{5}{6}$
-1	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{3}$



Gráfica de la función

$f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$\text{Ran } f = \mathbb{R}$

- b. Aplicando los principios anotados anteriormente, se puede trazar la gráfica de la función g .

1º. $g(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+8} \Rightarrow g(x) = \frac{x-4}{(x-4)(x-2)} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-2}$ si $x \neq 4$.

Se concluye que la función no toma el valor cero y que en el punto de abscisa $x = 4$ hay un agujero.

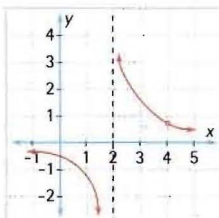
2º. Asíntota vertical: la recta $x = 2$.

3º. Intersección con el eje y : $g(0) = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$. Luego $g(0) = -\frac{1}{2}$.

4º. Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, es decir, $n < m$, el eje x es asíntota horizontal.

5º. Otros valores y la gráfica se muestran a continuación

x	$g(x)$
-1	$-\frac{1}{3}$
1	-1
3	1



En $x = 4$ hay un agujero. El valor correspondiente se calcula en

$g(4) = \frac{1-2}{4} = \frac{1}{2}$

$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{2\}$; $\text{Ran } g = \mathbb{R} - \{0\}$

Las gráficas de las funciones racionales podrán ser más complejas a medida que aumentan los grados de los polinomios en el numerador y en el denominador.

Funciones radicales

Una función radical es una función que contiene raíces de variables.

Por ejemplo, las funciones f , g y h , representadas por:

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}; h(x) = \frac{(x-1)^{1/4}}{3}$$

son funciones radicales.

El dominio de una función radical depende del índice de la raíz.

Si el índice es par, la función no está definida para valores de x para los cuales el radicando es negativo.

Si el índice es impar, la función está definida para todos los números reales.

El rango de una función radical puede determinarse al trazar su gráfica.

Si la función posee un polinomio en el denominador, para graficarla se utiliza el tratamiento descrito para las funciones racionales.

Ejemplo

Trazar la gráfica de cada función radical teniendo en cuenta los principios de graficación anotados en la página anterior.

a. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ b. $g(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c. $h(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

Solución

a. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

1°. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ no está definida si $2x-1 < 0$; es decir, si $x < \frac{1}{2}$. Luego, la gráfica empieza a partir de $x = \frac{1}{2}$.

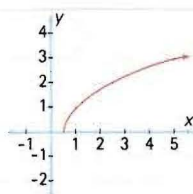
2°. No existen asíntotas verticales, ya que no es una función racional.

3°. No tiene intersección con el eje y , ya que $f(x)$ no está definido para $x = 0$.

4°. No tiene asíntota horizontal, ya que no es una función racional.

5°. Otros valores y la gráfica de la función son los siguientes:

x	$f(x)$
1	1
2	$\sqrt{3}$
5	3



Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{2x-1}$

$$\text{Dom } f = \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$$

$$\text{Ran } f = [0, \infty)$$

b. $g(x) = \sqrt[3]{x-3}$

1°. $g(x) = \sqrt[3]{x-3}$ está definida en todo \mathbb{R} . Luego, $g(x) = 0$ si $x = 3$.

2°. No existen asíntotas verticales.

3°. Intersección con el eje y : $g(0) = \sqrt[3]{0-3} = \sqrt[3]{-3} \approx -1,44$

4°. No tiene asíntota horizontal.

5°. Otros valores y la gráfica de la función se muestran a continuación:

Investigar

A partir de la gráfica de $y = x^{1/2}$, $y = x^{1/4}$, $y = x^{1/6}$, en el mismo sistema de ejes coordenados, ¿qué se puede concluir acerca de la forma en que n afecta la gráfica de $y = x^{1/n}$, para n par?